molts exemples de quasicristalls en dimensions 2 i 3 i se n'estudia la geometria.

La cinquena conferència, de JOSÉ M. F. LABASTIDA, té per objecte explicar per què la topologia de dimensions baixes és rellevant en mecànica quàntica. Es fa un ràpid recorregut pels invariants Seiberg-Witten, per la teoria *gauge* de Chern-Simons i per la teoria de supersimetria de Donalson-Witten, al mateix temps que es relaciona tot això amb la mecànica quàntica.

Les dues últimes conferències estan dedicades a la geometria fractal. La penúltima, a càrrec de BENOÎT B. MANDELBROT, el creador de la teoria, té per objecte la descripció d'un gran nombre de problemes oberts relacionats amb aquesta matèria. El text no és de cap manera de caràcter expositori, sinó que es redueix a una enumeració de problemes oberts de geometria fractal que apareixen en contextos molt diversos, cada un d'ells acompanyat de comentaris.

L'última conferència, a càrrec de LUCIANO PETRONERO, sí que és de caràcter expositori. Té per objectiu la descripció de diverses situacions de naturalesa fractal que es presenten en el món real. Situacions que abans de l'aparició de la geometria fractal no es podien reconèixer. Per exemple, la distribució de galàxies i cúmuls de galàxies a l'Univers, a diverses escales, sembla tenir naturalesa fractal. A part de la descripció de models d'aquest tipus que apareixen a l'Univers, la pregunta cabdal és com la naturalesa produeix aquests tipus de fenòmens fractals. El text de la conferència, de caràcter col·loquial, fa un breu viatge per tots aquests problemes i en dóna referències precises per a aquells que desitgin profunditzar en alguns d'ells.

J. Girbau
UAB

Problemes

Podeu trobar informació sobre la XXXVI Olimpíada Matemàtica (fase catalana) celebrada el passat desembre a l'adreça

\texttt{http://www.iec.es/scm/olimp_c.htm}

I podeu trobar les solucions dels problemes de les Olimpíades a l'adreça:

\texttt{http://pie.xtec.es/recursos/mates/aqui/agenda.htm#OLIMP}

on, per cert, trobareu una col·lecció interessantíssima de problemes.

Us recomanem també que visiteu el web de la SCM

http://www.iec.es/scm/indpro_c.htm

on trobareu els enunciats i solucions de les proves **Cangur** 2000 celebrades el passat mes de març a Catalunya, les Illes Balears i Castelló.

A la mateixa pàgina hi trobareu el concurs telemàtic **Relleus–2000** que ha començat enguany com un complement per equips al Cangur, i també hi trobareu informació sobre el **Fem matemàtiques** organitzat per la FEEMCAT (Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya).

També preguem als nostres lectors que si fan servir Tex o Latex per escriure les seves solucions, les enviïn per *mail* a l'adreça:

pelegri.viader@econ.upf.es

així com qualsevol proposta o suggeriment.

Problemes proposats

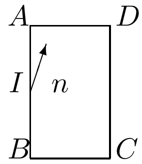
Us suggerim uns quants problemes que van ser proposats per diversos centres de secundària amb motiu del Concurs **Relleus–2000** organitzat per la SCM com una mena de «Cangur col·lectiu». Gairebé una trentena de centres de tot Catalunya han participat telemàticament en la contesa. Cada sessió consta de quatre problemes, la solució dels quals és necessària com a dada del següent problema (la idea del relleus). Cada centre pot crear equips de quatre estudiants (tants com el centre vulgui) per treballar els problemes. Esperem que el concurs arreli entre els nostres centres i constitueixi, junt amb el Fem Matemàtiques, el Cangur i la Olimpíada, una part important de l'oferta lúdica matemàtica del nostre país.

A40. (Proposat per l'IES de la Bisbal.) *El Pentadescomponible.* Per quins valors de l'enter N és possible trobar un enter positiu més petit que N i només un, que accepti ser descomposat de 5 maneres diferents com a suma d'enters consecutius? (Del diccionari: **Suma:** agregat de dos o més nombres.)

A41. (Proposat per l'IES Francisco de Goya.) En un full de paper quadriculat simularem algunes jugades de billar. En aquest full dibuixarem un rectangle $ABCD$ de 10 quadradets de llarg per 6 quadradets d'amplària. Sigui I el punt mitjà del costat AB. Sobre aquest punt col·loquem una bola de billar i la colpejem amb el tac cap al costat AD. Quan la bola toca per primera vegada el costat AD, haurà descrit un segment de recta de pendent n.

Proveu que, si a les nostres jugades n és sempre un nombre natural i no existeix fregament de la bola amb la superfície de la taula, la bola sempre retorna a I, descrivint una *trajectòria periòdica.*

Al llarg del seu viatge a través de la taula, la bola només toca en un nombre finit de punts diferents a les bandes.



Demostreu que la quantitat de punts que ha tocat la bola la banda AB és la mateixa que la quantitat de punts tocats per la bola a la banda DC i calculeu aquests nombre de punts en funció del valor de n.

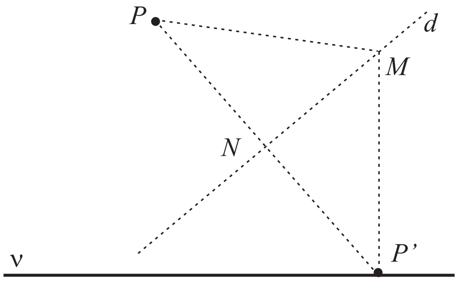
A42. (Proposat per l'IES Joanot Martorell.) Si tirem quatre daus enlaire, quina és la probabilitat que després de tirar puguem triar dos daus de manera que la suma dels punts que marquen aquests dos daus sigui 7? I si en tirem n en comptes de 4?

Solucions

Problemes proposats a SCM/Notícies 11

A36. (Proposat per Josep Pla de la UB.) *Una mica de papiroflèxia.* En un full blanc de paper dibuixeu-hi un punt. Trieu una vora del full i porteu el punt sobre la vora, tot doblegant el full i marcant bé el doblec. Repetiu l'operació amb diferents llocs de la mateixa vora. Podríeu caracteritzar la família de rectes (doblecs) que queden marcades al full?

Solució: (Antoni Gomà de l'IES Joanot Martorell). Després d'uns quants doblecs fets en un paper es pot intuir que la resposta al problema plantejat és: la família de rectes que resulta és l'envolupant de la paràbola que té per focus el punt i per directriu la vora triada. Es pot provar analíticament. Si prenem coordenades de manera que el punt sigui el $(0, a)$ i la vora sigui la recta $y = -a$, la paràbola indicada té com equació $y = \frac{1}{4a}x^2$. Si portem el punt inicial sobre el punt $(2b, -a)$ de la vora, el doblec té per equació $y = \frac{b}{a}(x - b)$ i un senzill càlcul mostra que aquesta recta és la tangent a la paràbola en el punt de la paràbola d'abscissa $2b$. Recíprocament, es comprova que la tangent a la paràbola en el punt d'abscissa $2b$ és el doblec (és a dir, l'eix de simetria) que transforma el punt $(0, a)$ en el punt $(2b, -a)$. Però també és bonic fer-ho sintèticament, recordant la propietat que caracteritza la tangent a una paràbola en un punt, que és la bisectriu de l'angle que formen la perpendicular a la directriu per aquell punt i el radi–vector del punt.



Si portem el punt P sobre el punt P' de la vora v el doblec serà la mediatriu d del segment PP'. Sigui N el punt mitjà de PP'. Per P' tracem la perpendicular a la recta v, que talla d en el punt M. És senzill de veure que els triangles MNP' i MNP són rectangles i iguals. Per tant $d(M,P) = d(M,P') = d(M,v)$ i això demostra que M és un punt de la paràbola de focus P i directriu v. Així mateix, la recta doblec d és la bisectriu de les rectes MP i MP' i, per tant és la tangent a la paràbola indicada en el punt M. La mateixa figura ens serveix per raonar que, recíprocament, qualsevol tangent a la paràbola és l'eix de simetria que permet portar el punt P sobre un punt P' de la vora.

A37. (Competició nacional russa. Final 1984. Nivell 16 anys.) Sense utilitzar càlcul diferencial, qui és més gran 2/201 o ln(101/100)?

Solució: (Antoni Gomà de l'IES Joanot Martorell). Amb una calculadora es comprova que $2/201 = 0.00995024$ i que $\ln(101/100) = 0.00995033$ i això ens diu que caldrà «afinar» molt per provar que $2/201 < \ln(101/100)$.

Per demostrar-ho podem veure, de manera equivalent, que $e^{\frac{2}{201}} < \frac{101}{100}$ o també que $e^2 < (1 + \frac{1}{100})^{201}$.

Ara bé, e^2 és el límit de la successió de terme general $(1 + \frac{1}{n})^{2n}$ però també ho és de la que té per terme general $(1 + \frac{1}{n})^{2n+1}$. Si agafeu un llibre de 2n de BUP antic i mireu com es fa per demostrar que la successió de terme general $(1 + \frac{1}{n})^n$ és estrictament creixent, veureu que paraula per paraula us serveix per demostrar que $(1 + \frac{1}{n})^{2n}$ defineix també una successió estrictament creixent i, en canvi, que $(1 + \frac{1}{n})^{2n+1}$ defineix una successió estrictament decreixent.

I llavors, com que $(1+\frac{1}{100})^{201}$ és el terme que correspon a $n = 100$ en aquesta última successió que té límit e^2 i és estrictament decreixent, qualsevol terme serà més gran que el límit. I així es demostra el que volíem.

A38. (Competició nacional russa. Final 1962. Nivell 16 anys.) Quina és la màxima àrea que pot tenir un triangle si els costats a, b, c han de complir $0 < a \le 1 \le b \le 2 \le c \le 3$?

Solució: (Antoni Gomà de l'IES Joanot Martorell). Comencem per veure que la màxima àrea d'un triangle que té dos costats de mides x i y s'obté quan el triangle és rectangle de catets x, y. Llavors, l'àrea màxima és $xy/2$.

Efectivament, l'àrea d'aquest triangle és $A = \frac{xy \cdot \sin C}{2}$ que serà màxima, evidentment, quan $\sin C = 1$ essent C l'angle que formen els costats coneguts.

Si ho apliquem al triangle de l'enunciat, el que tingui àrea màxima serà un triangle rectangle de catets a i b i hipotenusa c i la màxima àrea serà el màxim valor que pugui tenir $ab/2$.

Si $a \le 1$ i $b \le 2$ és clar que el valor màxim demanat és 1.

A39. (Competició nacional russa. Final 1965. Nivell 16 anys.) Un turista arriba a Moscou en tren. Durant tot el dia passeja a l'atzar pels carrers de la ciutat. Sopa a prop de la Plaça Roja i decideix tornar a l'estació caminant per aquells carrers que només hi ha passat un nombre imparell de vegades. Pot fer-ho?

Solució: (Redacció). Sempre és possible ferho. Si hem arribat a un determinat punt (restaurant) de la Plaça Roja per un carrer determinat, o bé hem passat per aquest carrer un nombre imparell de vegades o bé, si hi hem passat un nombre parell de vegades, hem passat per un altre un nombre imparell de vegades. Això és fàcil de demostrar pensant que cada cop que arribem al restaurant en qüestió per un carrer sumem $+1$ a un comptador i cada cop que en sortim (pel mateix carrer o un altre) en sumem -1 al comptador. Cada cop que ens trobem davant del restaurant hem de tenir un $+1$ al comptador. El mateix raonament s'aplica a la cruïlla anterior i així fins a arribar a l'estació de partida.

Altres idees: L'Antoni Gomà també ha donat la solució sense massa explicacions. Opina que l'enunciat del problema és ambigu.

P. Viader
UPF